I Prova in Itinere di Statistica Matematica A - 11 Novembre 2002

Allievi Meccanici, II anno, sez. N-Z

Docente: L. Valdettaro

Tempo a disposizione: 2 ore

I. Domande a risposta multipla

Ogni domanda ha una sola risposta esatta. Le risposte sbagliate sono contate negativamente per un terzo del valore della risposta esatta.

1. **Consideriamo una serie di n dati grezzi che possono assumere soltanto due valori, 0 e 1; se la media campionaria è pari a $1/2$, allora:**

☐ la varianza campionaria è pari a 1
☐ la varianza campionaria è pari a $\frac{n}{2(n-1)}$
☐ non si hanno abbastanza informazioni per poter calcolare la varianza campionaria
⊠ la varianza campionaria è pari a $\frac{n}{4(n-1)}$

2. **Se A, B e C sono eventi di uno spazio di probabilità, allora**

⊠ $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$
☐ $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) + p(A \cap B) + p(A \cap C) + p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C)$
☐ $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B \cap C)$
☐ $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(\overline{A} \cap \overline{B}) - p(\overline{A} \cap \overline{C}) - p(\overline{B} \cap \overline{C})$

3. **Siano X e Y due variabili aleatorie (non necessariamente indipendenti) aventi entrambe media nulla e varianza pari a 1. Allora**

⊠ $\mathrm{Var}(X+Y) = 2\mathbb{E}(XY) + 2$
☐ $\mathrm{Var}(X+Y) = 1$
☐ $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}(XY)$
☐ $\mathrm{Var}(X+Y) = 2$

4. **Siano X e Y due variabili aleatorie aventi media e varianza finita. Allora**

☐ $\mathrm{cov}(XY, Y) = \mathbb{E}(XY^2) - \mathbb{E}(X)[\mathbb{E}(Y)]^2$
⊠ $\mathrm{cov}(XY, Y) = \mathrm{cov}(X, Y^2) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(XY)\mathbb{E}(Y)$
☐ $\mathrm{cov}(XY, Y) = \mathrm{cov}(X, Y^2) - \mathbb{E}(XY)\mathbb{E}(Y)$
☐ $\mathrm{cov}(XY, Y) = \mathbb{E}(XY^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2)$

5. **Sia X_n una v.a. binomiale di parametri n e $p = 5/(n+5)$: $X_n = B(n, 5/(n+5))$. Per n sufficientemente grande**

⊠ X_n tende a una poissoniana $P(5)$
☐ X_n non tende a una poissoniana ma si può affermare che il valore medio tende a 5
☐ X_n tende a una poissoniana $P(1)$
☐ X_n non tende a una poissoniana ma si può affermare che il valore medio tende a 1

II. Esercizi

Riportare oltre al risultato anche (sinteticamente) il procedimento con cui esso è stato trovato. Gli esercizi dove compare solo il risultato verranno considerati nulli, anche se questo fosse esatto.

---

1. **Vengono lanciate due monete; la prima non è truccata (testa e croce hanno la stessa probabilità), mentre per la seconda la probabilità dell'evento *testa* è pari a 1/4. Si consideri la v.a. che all'evento testa associa 0 e all'evento croce il valore 1. Calcolare la densità discreta della v.a. X somma dei valori ottenuti nel lancio delle due monete. Calcolare il valore atteso di X e la sua varianza.**

Soluzione. Chiamiamo X_i le v.a. che misurano l'esito dell'i-esimo lancio. Avremo $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ per la prima moneta e $P(X_2 = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X_2 = 1) = \frac{3}{4}$ per la seconda.

Poiché $X = X_1 + X_2$ avremo che X può assumere solo i valori 0 , 1 e 2. Inoltre possiamo considerare le X_i indipendenti tra loro da cui
$P(X_1 = i, X_2 = j) = P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = j)$

Quindi:
$P(X = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
$P(X = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$
$P(X = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

X	0	1	2
p_X	1/8	1/2	3/8

$\mathbb{E}(X) = 1/8 * 0 + 1/2 * 1 + 3/8 * 2 = 1.25$
$\mathbb{E}(X^2) = 1/8 * 0^2 + 1/2 * 1^2 + 3/8 * 2^2 = 2$
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 0.4375$

---

2. **Si consideri il lancio di due dadi. Denotiamo con A l'evento connesso a un totale pari, con B l'evento connesso ad un 4 sul primo dado, e con C l'evento connesso ad un numero pari sul secondo dado.**
a) A **e** B **sono indipendenti?**
b) A **e** C **sono indipendenti?**
c) B **e** C **sono indipendenti?**
d) A, B **e** C **sono indipendenti tra loro?**

Soluzione. Due eventi X e Y sono indipendenti se, ad esempio, è soddisfatta la condizione $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$

Calcoliamo le varie probabilità col metodo del conteggio (casi favorevoli su casi possibili) ottenendo:

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $P(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Evidentemente le coppie di eventi sono tutte e tre indipendenti.

Per l'indipendenza della terna dobbiamo verificare l'ulteriore condizione:

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
che non risulta soddisfatta in quanto
$P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

---

3. **Un treno ha due vagoni di capacità massima pari a 20 passeggeri ciascuno. Siano X e Y rispettivamente il numero di passeggeri sul primo e sul secondo vagone; si assuma che le variabili X e Y siano indipendenti e con distribuzione binomiale $B(20, 1/3)$. Calcolare**
a) la probabilità che vi siano passeggeri sul treno
b) il numero medio di passeggeri sul treno
c) la probabilità che almeno una carrozza sia vuota

Soluzione. Chiamiamo A l'evento *{la prima carrozza è vuota}* e B l'evento *{ la seconda carrozza è vuota}*. Definiamo inoltre la v.a. $Z = X + Y \sim B(40, 1/3)$

a) Per ottenere il risultato cercato calcoliamo $p = P(Z > 0) = 1 - P(Z = 0)$ da cui
$p = 1 - \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} (1/3)^0 (2/3)^{40} = 1 - 9.044 \times e^{-8} = 0.999999910.$

oppure calcoliamo $p = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A) \cdot P(B) = 1 - P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$ da cui
$p = 1 - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} (1/3)^0 (2/3)^{20} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} (1/3)^0 (2/3)^{20}$ che porta al medesimo risultato.

b) Poiché $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ otteniamo lo stesso risultato calcolando $\mathbb{E}(Z) = \frac{40}{3}$ oppure $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{20}{3} + \frac{20}{3}$

c) Calcoliamo $p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ da cui
$p = (2/3)^{20} + (2/3)^{20} - (2/3)^{40} \simeq 0.000601367$

---

4. **Un impianto è soggetto a guasti casuali che si realizzano nel tempo secondo un processo di Poisson. Il numero medio di guasti in un anno è pari a 6. Si supponga per comodità che tutti i mesi hanno lo stesso numero di giorni. Calcolare:**
a) la probabilità che in un anno non vi siano più di due guasti
b) la probabilità che in un mese non si verifichino guasti
c) la probabilità che il quarto guasto avvenga dopo il sesto mese

Soluzione. Scegliamo i mesi come unità di misura temporale e definiamo la v.a. poissoniana $X_t =$ *{numero di guasti in t mesi}* $\sim P(\nu t)$.
Misurando il tempo in mesi l'intensità del processo vale $\nu = \lambda/t = 0.5$. Pertanto:

a) $P(X_{12} \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-6} \frac{6^k}{k!} = e^{-6}(1 + 6 + 18) \simeq 0.061968804$

b) $P(X_1 = 0) = e^{-0.5} \simeq 0.60653066$

c) Piccolo ragionamento: se il quarto guasto si verifica dopo il sesto mese vuol dire che nei primi sei mesi sono avvenuti meno di quattro guasti quindi:

$P(X_6 < 4) = P(X_6 \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} e^{-3} \frac{3^k}{k!} = e^{-3}(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}) \simeq 0.647231889$